

第四章 一元函数微分学的应用

1. 单项选择题:

(1) 下列函数在 $[-1,1]$ 上满足罗尔定理条件的是 ().

- A. $y = \ln(1-x^2)$ B. $y = |x|$ C. $y = \sqrt[3]{x^2-1}$ D. $y = \sqrt[3]{x+1}$

(2) 函数 $f(x) = x^2 - x - 2$ 在区间 $[0,2]$ 上使用拉格朗日中值定理时, 则 $\xi =$ ().

- A. 1 B. 3 C. 4 D. 5

(3) 函数在 $f(x) = 4x^3$ 在区间 $[0,1]$ 上满足拉格朗日定理条件, 则定理中的 $\xi =$ ().

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. 1 C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. 0

(4) 下列函数中既是奇函数又是单调递增函数的是 ().

- A. $\sin^3 x$ B. $x^3 + 1$ C. $x^3 + x$ D. $x^3 - 1$

(5) 函数 $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 2$ 的单调递增区间是 ().

- A. $(0, +\infty)$ B. $(-\infty, 0)$ C. $(-1, +\infty)$ D. $(-\infty, -1)$

(6) 函数 $f(x) = 4x^2 - mx + 5$ 在 $[-2, +\infty)$ 上是增函数, 在 $(-\infty, -2)$ 是减函数, 则 ().

- A. -7 B. 1 C. 17 D. -16

(7) 函数 $f(x)$ 在区间 $(-2,3)$ 是增函数, 则 $y = f(x+5)$ 的递增区间是 ().

- A. $(3,8)$ B. $(-7,-2)$ C. $(-2,3)$ D. $(0,5)$

(8) 函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调连续, 且 $f(a)f(b) < 0$, 则方程 $f(x) = 0$ 在 $[a,b]$ 上 ().

- A. 至少有一实根 B. 至多有一实根 C. 没有实根 D. 必有唯一实根

(9) 若函数 $f(x) = x^2 + ax + \frac{1}{x}$ 在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 是增函数, 则 a 的取值范围是 ().

- A. $[-1,0]$ B. $[-1, +\infty)$ C. $[0,3]$ D. $[3, +\infty)$

(10) 已知函数在 $f(x) = ax + \frac{b}{x}$ 在点 $x = -1$ 处取得极大值, 则常数 a, b 应满足条件 ().

- A. $a - b = 0, b < 0$ B. $a - b = 0, b > 0$ C. $a + b = 0, b < 0$ D. $a + b = 0, b > 0$

(11) 已知 $f(x)$ 的二阶导数存在, 且 $f(2) = 1$, 则 $x = 2$ 是函数 $F(x) = (x-2)^2 f(x)$ 的 ().

- A. 极小值点 B. 最小值点 C. 极大值点 D. 最大值点

(12)函数 $f(x) = a\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x$, 在 $x = \frac{\pi}{3}$ 处取得极值, 则 $a =$ ().

- A. 2 B. -2 C. $\frac{2}{3}$ D. $-\frac{2}{3}$

(13)函数 $f(x) = e^x - x + 1$ 的极值是 ().

- A. 2 B. 1 C. 0 D. -1

(14)函数 $f(x) = ax^3 + bx^2$ 取得极大值和极小值时 x 的值分别为 0 和 $\frac{1}{3}$, 则 ().

- A. $a - 2b = 0$ B. $2a - b = 0$ C. $2a + b = 0$ D. $a + 2b = 0$

(15)函数 $f(x) = x^3 - 3x^2$ 在区间 $[-2, 1]$ 上的最小值和最大值分别为 ().

- A. -20, 0 B. -20, -2 C. -4, 0 D. -4, -2

(16)函数 $f(x) = -x^3 + ax^2 - 4$ 在 $x = 3$ 处取得极值, 在 $[-1, 1]$ 最小值与最大值的和为 ().

- A. 0 B. 1 C. 9 D. 11

(17)点 (1, 2) 为曲线 $y = ax^3 + bx^2$ 的拐点, 则常数 a 与 b 的值应分别是 ().

- A. -1 和 3 B. 3 和 -1 C. -2 和 6 D. 6 和 -2

(18)曲线 $y = 1 + x^3$ 的拐点是 ().

- A. (0, 1) B. (1, 0) C. (0, 0) D. (1, 1)

(19)曲线 $y = \ln x + \frac{1}{2}x^2 + 1$ 的下凹区间是 ().

- A. $(-\infty, -1)$ B. $(-1, 0)$ C. (0, 1) D. $(1, +\infty)$

(20)函数 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内连续, $f'(x) < 0$, $f''(x) < 0$, 则在区间 (a, b) 内 ().

- A. 单调递减且上凹的 B. 单调递增且上凹的
C. 单调递减且下凹的 D. 单调递增且下凹的

(21)曲线 $y = xe^{-x}$ 的拐点是 ().

- A. $x = 1$ B. $x = 2$ C. $(2, \frac{2}{e^2})$ D. $(1, \frac{1}{e})$

(22)曲线 $f(x) = \frac{x^4 - 2}{3x^4}$ 的水平渐近线是 ().

- A. $y = \frac{2}{3}$ B. $y = -\frac{2}{3}$ C. $y = \frac{1}{3}$ D. $y = -\frac{1}{3}$

(23)如果曲线 $y = ax + \frac{x^2}{x+1}$ 的水平渐近线存在, 则常数 $a =$ ().

- A. 2 B. 1 C. 0 D. -1

(24) 曲线 $f(x) = \frac{x^2+1}{x^3+2x-3}$ 的水平渐近线是 ().

A. $y = 0$

B. $y = \frac{1}{3}$

C. $y = \frac{1}{2}$

D. $y = 1$

2. 填空题:

(1) 若函数 $f(x) = \sqrt{9-x^2} + \frac{k}{2}x$ 在区间 $[0,3]$ 上满足罗尔定理, 则常数 $k =$ _____.

(2) 函数 $f(x) = \frac{4x}{1+x}$ 在区间 $[1,3]$ 上使用拉格朗日中值定理时, 则 $\xi =$ _____.

(3) 已知 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2+ax-6}{x-3}$ 存在, 则 $a =$ _____.

(4) 函数 $f(x) = ax^2 + bx$ 在 $x=1$ 处取得极值 2, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.

(5) 函数 $f(x) = x^3 - 12x$ 的极小值点 $x =$ _____, 极大值点 $x =$ _____.

(6) 函数 $y = 3x \cdot 3^x$ 在 x_0 处取得极小值, 则 $x_0 =$ _____.

(7) 函数 $y = (x-1)^{-2}$ 的减区间是 _____.

(8) 函数 $y = x - 2\sqrt{1-x} + 2$ 的值域是 _____.

(9) 函数 $y = ax^2 + 4(a+1)x - 3$ 在区间 $[2, +\infty)$ 递减, 则 a 的取值范围是 _____.

(10) 函数 $f(x) = 1 - x^4$ 的单调递增区间是 _____.

(11) 函数 $f(x) = (x-3)e^x$ 的单调递增区间是 _____.

(12) 函数 $y = \begin{cases} x-1, & 0 \leq x \leq 2, \\ x+1, & 2 < x \leq 4 \end{cases}$ 在 $x =$ _____ 取得最小值, 在 $x =$ _____ 取得最大值.

(13) 函数 $y = -x^2 + 6x + 9$ 在 $[a, b]$ ($a < b < 3$) 有最大值 9, 最小值 -7, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.

(14) 函数 $f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x - 4$ 在 $[0, 2]$ 上的最小值是 _____.

(15) 函数 $f(x) = x + 2\cos x$ 在 $[\frac{1}{2}, 1]$ 上的最大值是 _____.

(16) 函数 $y = x - \sin x$ 的曲线在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内凹凸性为 _____ 的.

(17) 函数 $y = 2x^3 + x + 1$ 的拐点为 _____.

(18)若曲线 $y = x^3 + ax^2 + bx + 2$ 有拐点 $(-1, 0)$, 则常数 $b =$ _____.

(19)曲线 $y = 2x^3 - 6x^2$ 的拐点是_____.

(20)曲线 $y = \frac{\ln(1+x)}{x}$ 的水平渐近线方程是_____.

(21)曲线 $y = \frac{x^2}{1+x}$ 的垂直渐近线方程是_____.

(22)曲线 $f(x) = \frac{2x^3}{x^2 - 1}$ 的垂直渐近线方程为_____.

3. 验证下列函数在给定区间上满足罗尔中值定理的三个条件, 并求出定理中的 ξ :

(1) $f(x) = x\sqrt{3-2x}$, $[0, \frac{3}{2}]$;

(2) $f(x) = 2x^3 + x^2 - 3x - 2$, $[0, 1]$;

(3) $f(x) = (x+2)^2(x-3)$, $[-2, 3]$;

(4) $f(x) = e^{x^4} + 1$, $[-1, 1]$.

4. 求下列函数的极限:

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \tan x})$;

(2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln^2 x}{(x-1)^2}$;

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^2 \sin x}$;

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x})^{\tan x}$;

(5) $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi}{2} x$;

(6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \cos x}{x - \sin x}$;

(7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{\sin 3x}$;

(8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x \operatorname{arccot} x}$;

(9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(3x^2 + 2x)(e^{2x} - 1)}{(x^2 + x) \ln(1 + \sin 2x)}$;

(10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$;

(11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^x - 6^x}{x}$;

(12) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \tan 7x}{\ln \tan 2x}$;

(13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\sec x - \cos x}$;

(14) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cot 2x$;

(15) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{e^{-x} - e^{-a}}{x - a}$;

(16) $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x^2} - \cot^2 x)$;

(17) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos x}}$;

(18) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln(1+x) - \ln x]$;

$$(19) \lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}};$$

$$(20) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{3x+2} - 2}{x-2};$$

$$(21) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos x}{x^2};$$

$$(21) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x};$$

$$(23) \lim_{x \rightarrow 0} [\tan(\frac{\pi}{4} - x)]^{\cot x};$$

$$(24) \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x + \cos x)^{\frac{1}{x}}.$$

5. 求下列函数的极值:

$$(1) f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2;$$

$$(2) f(x) = \frac{2x}{1+x^2};$$

$$(3) f(x) = (x^2 - 1)^2 - 1;$$

$$(4) f(x) = xe^{-x};$$

$$(5) f(x) = x + \sqrt{1-x^2};$$

$$(6) f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 18x - 7.$$

6. 求下列函数的单调区间:

$$(1) f(x) = \frac{1}{x} - x + a \ln x;$$

$$(2) f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 - 6x - 2;$$

$$(3) f(x) = 2x^2 - \ln x;$$

$$(4) f(x) = \frac{x^2}{1+x};$$

$$(5) f(x) = e^x - x - 1;$$

$$(6) f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{4}x - 2.$$

7. 求下列函数在给定区间的最大值和最小值:

$$(1) f(x) = x^4 - 2x^2 + 5, [-2, 2];$$

$$(2) f(x) = 3 - x - \frac{4}{(x+3)^2}, [-2, 2];$$

$$(3) f(x) = \sqrt{6-3x}, [-1, 1];$$

$$(4) f(x) = e^{-x} \sin x, [0, 2\pi].$$

8. 函数 $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + m$ 在 $[-2, 2]$ 上有最大值 3, 试确定常数 m , 并求这个函数在 $[-2, 2]$ 的最小值.

9. 某电器公司为便于储存一些小的电器部件, 准备用薄木板做成一些外观体积为常数 V 的长方体存储箱. 问存储箱各边的长度为多少时, 木板用料最省?

10. 某企业生产某产品的市场需求量 Q (件) 与其价格 p (万元) 的关系为 $Q(p) = 120 - 8p$. 总成本函数为 $C(Q) = 100 + 5Q$, 当 p 多少时, 企业所获的利润最大, 最大利润为多少?

11. 某客船的燃料费为每小时 y 元, 客船的速度为每小时 x 千米, 燃料费和客船速度两者之间的关系是 $y = 0.01x^3 + x$, 若该船航行时其他费用为每小时 540 元, 则在 500 千米的航程中, 要使得航行的总费用最少, 客船速度应为每小时多少千米.

12. 现需要制作一个容积 256 立方米的无盖长方体水箱, 若该水箱的底部为正方形, 为使

所用的材料最省，水箱的高和底面边长应如何设计？

13. 求下列函数的凹凸区间及拐点：

$$(1) f(x) = \frac{3}{x^2 - 2x + 4};$$

$$(2) f(x) = x \arctan \frac{1}{x};$$

$$(3) f(x) = \frac{2x^2}{(1-x)^2};$$

$$(4) f(x) = xe^x;$$

$$(5) f(x) = \sqrt[3]{x-4} + 2;$$

$$(6) f(x) = x - 3(x-1)^{\frac{1}{3}};$$

$$(7) f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 1;$$

$$(8) f(x) = \sin x + \cos x, x \in [0, 2\pi].$$