

## 第六章 定积分

1. 填空题:

(1) 已知  $\int_1^2 \varphi(x) dx = 4$ ,  $\int_1^6 \varphi(x) dx = 9$ , 则  $\int_2^6 \varphi(x) dx =$  \_\_\_\_\_.

(2) 定积分  $\int_{-2}^2 \sqrt{1-x^2} dx$  的几何意义是 \_\_\_\_\_, 其值为 \_\_\_\_\_.

(3) 定积分  $\frac{d}{dx} \int_1^3 \operatorname{arccot} x^2 dx =$  \_\_\_\_\_.

(4) 设  $f(x)$  是连续的奇函数, 且  $\int_0^1 f(x) dx = 3$ , 则  $\int_{-1}^0 f(x) dx =$  \_\_\_\_\_.

(5) 定积分  $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} x^5 \tan x dx =$  \_\_\_\_\_.

(6) 比较定积分的大小:  $\int_5^1 e^{x^2} dx$  \_\_\_\_\_  $\int_5^1 e^{x^3} dx$ .

(7) 设  $f(x) = \int_0^x |t| dt$ , 则  $f'(x) =$  \_\_\_\_\_.

(8) 极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \int_0^{x^2} \cos t^2 dt}{x^{10}} =$  \_\_\_\_\_.

(9) 设  $F(x) = \int_{x^3}^{x^2} x e^{t^2+t} dt$ , 则  $F'(x) =$  \_\_\_\_\_.

(10) 设函数  $f(x)$  连续,  $F(x) = \int_0^x (x-t)f(t)dt$ , 则  $F'(x) =$  \_\_\_\_\_.

(11) 已知当  $x \rightarrow 0$  时,  $\int_0^{x^2} \sin t dt$  与  $x^\alpha$  是同阶无穷小, 则常数  $\alpha =$  \_\_\_\_\_.

(12) 已知  $f(x)$  连续且  $\int_0^{4x} f(2t) dt = 4x^4$ , 则  $f(16) =$  \_\_\_\_\_.

(13) 若  $f(x) > 3$ , 且在区间  $[0, 4]$  上连续, 则函数  $F(x) = 2x + 3 - \int_0^x f(t) dt$  在区间  $[0, 4]$  上单调 \_\_\_\_\_ (填“递增”或“递减”).

(14) 函数  $f(x) = \int_0^{(x-3)^2} e^{-2t} dt$  的极值为 \_\_\_\_\_.

(15) 如果  $f(x)$  有一阶连续导数, 且  $f(b) = 7, f(a) = 1$ , 则  $\int_a^b f'(x) dx =$  \_\_\_\_\_.

(16) 已知函数  $f(x) = \frac{x}{1+x}$ , 则定积分  $\int_1^2 f\left(\frac{1}{x}\right) dx =$  \_\_\_\_\_.

(17) 定积分  $\int_0^3 |x-2| dx =$  \_\_\_\_\_.

(18) 定积分  $\int_0^2 \max\{2x-x^2, x\} dx =$  \_\_\_\_\_.

(19) 设  $f(x) = e^{-x}$ , 则  $\int_1^2 \frac{f'(\ln x)}{x} dx =$  \_\_\_\_\_.

(20) 设  $f(x) = \begin{cases} 1, & -2 \leq x < 0, \\ x+1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2x, & 1 < x \leq 2, \end{cases}$  则  $\int_{-2}^2 f(x) dx =$  \_\_\_\_\_.

(21) 定积分  $\int_0^1 x e^{x^2} dx =$  \_\_\_\_\_.

(22) 定积分  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \sin 2x dx =$  \_\_\_\_\_.

(23) 定积分  $\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx =$  \_\_\_\_\_.

(24) 定积分  $\int_0^1 x e^x dx =$  \_\_\_\_\_.

(25) 定积分  $\int_{-1}^1 \frac{\tan^3 x + (\arctan x)^2}{1+x^2} dx =$  \_\_\_\_\_.

(26) 已知  $f'(x) \int_0^2 f(x) dx = 50$ , 且  $f(0) = 0$ , 则  $f(x) =$  \_\_\_\_\_.

(27) 定积分  $\int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2} dx =$  \_\_\_\_\_.

(28) 当  $\rho$  满足 \_\_\_\_\_ 时, 广义积分  $\int_1^{+\infty} \frac{x^\rho}{1+x} dx$  收敛.

(29) 广义积分  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{(x+7)\sqrt{x-2}} dx =$  \_\_\_\_\_.

(30) 广义积分  $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx =$  \_\_\_\_\_.

(31) 广义积分  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}} dx =$  \_\_\_\_\_.

(32) 已知广义积分  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{k|x|} dx = 2$ , 则  $k =$  \_\_\_\_\_.

(33) 已知  $\int_k^{+\infty} 8e^{-8x} dx = e^{-16}$ , 且  $k$  为常数, 则  $k =$  \_\_\_\_\_.

(34) 广义积分  $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx$  是 \_\_\_\_\_ 的. (填“收敛”或“发散”).

(35) 广义积分  $\int_0^1 \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx =$  \_\_\_\_\_.

(36) 广义积分  $\int_0^1 \ln x dx =$  \_\_\_\_\_.

(37) 设  $D$  是由  $xy+1=0, y+x=0, y=2$  围成的有界区域, 则  $D$  的面积为\_\_\_\_\_.

(28) 抛物线  $y^2 = ax(a > 0)$  与  $x=1$  所围图形在第一象限的面积为  $\frac{2}{3}$ , 则  $a =$  \_\_\_\_\_.

(39) 曲线  $y = \frac{4}{x}$  与直线  $y = x, y = 4x$  在第一象限围成的平面图形的面积为\_\_\_\_\_.

2. 计算下列定积分:

(1)  $\int_0^1 x^7 dx$ ;

(2)  $\int_0^1 2^x dx$ ;

(3)  $\int_0^2 x^5 dx$ ;

(4)  $\int_0^2 e^x dx$ ;

(5)  $\int_1^2 (x + \frac{1}{x}) dx$ ;

(6)  $\int_0^1 (\frac{\sqrt{x} + 2x}{x}) dx$ ;

(7)  $\int_0^1 (3x^2 - x + 4) dx$ ;

(8)  $\int_{-1}^1 (2x^3 - 3x - 1) dx$ ;

(9)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x dx$ ;

(10)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ ;

(11)  $\int_1^2 5^x dx$ ;

(12)  $\int_0^{\ln 2} e^x dx$ ;

(13)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin x dx$ ;

(14)  $\int_1^2 \frac{x\sqrt{x\sqrt{x}} - x^3}{x} dx$ ;

(15)  $\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}} dx$ ;

(16)  $\int_0^1 x(\sqrt{x} + x + 2) dx$ ;

(17)  $\int_0^2 t(3t - 2x) dt$ ;

(18)  $\int_{-1}^1 (2x + \sqrt{4 - 4x^2})^2 dx$ ;

(19)  $\int_1^2 \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} dx$ ;

(20)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7 x \sin x dx$ ;

(21)  $\int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx$ ;

(22)  $\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$ ;

(23)  $\int_1^2 x(x-1)^{\frac{1}{5}} dx$ ;

(24)  $\int_0^4 \cos(\sqrt{x}-1) dx$ ;

(25)  $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{4-x}} dx$ ;

(26)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+3\sin^2 x} dx$ ;

(27)  $\int_{-1}^2 \frac{x+1}{1+\sqrt{2+x}} dx$ ;

(28)  $\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx$ ;

$$(29) \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2 \sqrt{1+x^2}} dx;$$

$$(30) \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx.$$

3. 计算下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x e^{x^2}} \int_0^x t e^{t^2} dt;$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x - \sin x} \int_0^{\sin x} \frac{t^2}{\sqrt{4+2t^2}} dt;$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left( \int_0^x e^{t^2} dt \right)^2}{\int_0^x t e^{2t^2} dt};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_1^x \frac{\sin(t^2-1)}{t-1} dt.$$

4. 计算下列广义积分:

$$(1) \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx (a > 0);$$

$$(2) \int_{\pi}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} dx;$$

$$(3) \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos x dx;$$

$$(4) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + 3} dx;$$

$$(5) \int_1^{+\infty} \frac{1}{x \sqrt{1+2x^4+x^8}} dx.$$

5. 已知  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-a}{x+a} \right)^x = \int_a^{+\infty} 4x^2 e^{-2x} dx$ , 其中  $a \neq 0$ , 求常数  $a$  的值.

6. 若  $\int_0^1 \frac{1}{x^{p-2}} dx + \int_1^{+\infty} x^{1-2p} dx$  存在,  $p$  为整数, 求  $p$  的值.

7. 讨论  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x}{1+x^2} dx$  的敛散性.

8. 设  $f(x)$  连续,  $\varphi(x) = \int_0^1 f(xt) dt$ , 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A$  ( $A$  为常数), 求  $\varphi'(x)$  并讨论  $\varphi'(x)$  在  $x=0$  处的连续性.

9. 讨论  $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^k} dx$  的敛散性, 其中  $k$  为常数.

10. 已知  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2}, & x > 0, \\ e^x + 2, & x \leq 0, \end{cases}$  求  $\int_{-1}^1 f(x) dx$ .

11. 已知  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+\cos x}, & -\pi < x < 0, \\ x e^{-x^2}, & x \geq 0, \end{cases}$  求  $\int_1^4 f(x-2) dx$ .

12. 求定积分  $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} |x-x^2| dx$ .

13. 求定积分  $\int_0^{\pi} \sqrt{\sin^2 x - \sin^4 x} dx$ .
14. 已知函数  $f(x)$  具有二阶连续导数, 且满足  $f(2) = \frac{1}{2}$ ,  $f'(2) = 0$  及  $\int_0^2 f(x) dx = 4$ , 求  $\int_0^1 x^2 f''(2x) dx$ .
15. 设  $f(2x-1) = x \ln x$ , 求  $\int_1^3 f(t) dt$ .
16. 若连续函数  $f(x)$  满足  $f(x) = \frac{1}{1+x^2} + \sqrt{1-x^2} \int_0^1 f(t) dt$ , 求  $f(x)$ .
17. 设连续函数  $f(x)$  满足  $f(x) = x^2 - x \int_0^2 f(x) dx + 2 \int_0^1 f(x) dx$ , 求  $f(x)$ .
18. 已知  $y = y(x)$  是由  $\int_0^y e^{2t} dt = \int_0^{x^3} \sin t dt + \cos y^2$  确定的函数, 求  $dy$ .
19. 求曲线  $y = 4x^2 (x \geq 0)$ , 直线  $y = 3$  及  $y$  轴所围成的平面图形的面积.
20. 求曲线  $y = e^{-x}$  与直线  $y = 0$  之间位于第一象限的平面图形的面积.
21. 计算由抛物线  $y = x^2 - 1$  与  $y = 7 - x^2$  所围成的平面图形的面积.
22. 求由曲线  $y = \sin x, y = \cos x$  与直线  $x = 0, x = \frac{\pi}{2}$  所围成的平面图形的面积.
23. 计算由曲线  $y^2 = 9 - x$ , 直线  $x = 2$  及  $y = -1$  所围成的平面图形上面部分(面积大的那部分)的面积  $A$ .
24. 已知曲线  $y = ax - x^2 (a > 0)$  与  $x$  轴围成的平面图形被曲线  $y = bx^2 (b > 0)$  分成面积相等的两部分, 求  $a, b$  的值.
25. 求曲线  $y = \ln x$  在区间  $(2, 6)$  内的一条切线, 使得该切线与直线  $x = 3, x = 3$  和曲线  $y = \ln x$  所围成的平面图形的面积最小.
26. 已知曲线  $y = a\sqrt{x} (a > 0)$  与曲线  $y = \ln \sqrt{x}$  在点  $(x_0, y_0)$  处有公共切线, 求:
- (1) 常数  $a$  及切点  $(x_0, y_0)$ ;
- (2) 两曲线与  $x$  轴围成的平面图形的面积  $S$ .
27. 求曲线  $y = e^{2x}$  与其在点  $(1, e^2)$  处的法线及  $y$  轴所围成图形的面积.
28. 求曲线  $y = 4x - x^2$  和直线  $y = x$  围成的平面图形绕  $x$  轴旋转一周所得立体的体积.
29. 已知曲线  $y = x^3 (x \geq 0)$ , 直线  $x + y = 2$  以及  $y$  轴围成一平面图形  $D$ , 求平面图形  $D$  绕

$y$  轴旋转一周所得旋转体的体积.

30. 已知曲线  $x = y + e^y$ , 直线  $x = y, y = 1, y = 4$  围成一平面图形  $D$ , 求平面图形  $D$  绕  $y$  轴旋转一周所得的旋转体的体积  $V_y$ .

31. 求曲线  $y = 4 - (x - 3)^2$  与  $x$  轴所围成的平面图形分别绕  $x$  轴,  $y$  轴旋转一周而成的立体体积  $V_x, V_y$ .

32. 设直线  $y = ax$  与抛物线  $y = x^2$  所围成图形的面积  $S_1$ , 它们与直线  $x = 2$  所围成图形的面积为  $S_2$ , 并且  $a < 1$ :

(1) 试确定  $a$  的值, 使  $S_1 + S_2$  达到最小, 并求出最小值.

(2) 求该最小值所对应的平面图形绕  $x$  轴旋转一周所得旋转体的体积.

33. 已知曲线  $y = x^2$ :

(1) 求该曲线在点  $(2, 3)$  处的切线方程;

(2) 求该曲线与该切线及直线  $y = 0$  所围成的平面图形的面积  $S$ ;

(3) 求上述平面图形绕  $x$  轴旋转一周所得旋转体的体积  $V$ .

34. 设函数  $f(x) = \frac{\sqrt{x^3 + 1}}{\sqrt{x}(1 + x)}$ :

(1) 求曲线  $y = f(x)$  的水平渐近线方程;

(2) 求由曲线  $y = f(x)$  和直线  $x = 1$ ,  $x = 2$  及  $y = 0$  所围成的平面图形绕  $x$  轴旋转一周而成的旋转体体积  $V$ .