

第二章 极限与连续

1. 单项选择题:

(1) 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x}$ 的值是 ().

- A. $+\infty$ B. $-\infty$ C. 0 D. 不存在

(2) 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = ()$.

- A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. 2 D. -2

(3) 极限 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-8}{x^2+2x-8} = ()$.

- A. -2 B. 2 C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

(4) 若极限 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-2x+k}{x-2} = 2$, 则 $k = ()$.

- A. 1 B. -1 C. 0 D. 任意常数

(5) 无穷小量是 ().

- A. 比 0 稍大一点的一个数 B. 一个很小的数
C. 以 0 为极限的一个变量 D. 0

(6) 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin^2 \frac{1}{x}$ 的值为 ().

- A. 1 B. ∞ C. 不存在 D. 0

(7) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\ln(1-2x^2)$ 与 $-2x^2$ 比较是 ().

- A. 较低阶的无穷小 B. 较高阶的无穷小
C. 等价无穷小 D. 同阶无穷小

(8) 当 $x \rightarrow 0$ 时, x^2 是 x^2-2x 的 ().

- A. 低阶无穷小 B. 高阶无穷小
C. 等价无穷小 D. 同阶但非等价的无穷小

(9) 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = ()$

- A. 1 B. 0 C. -1 D. ∞

(10) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $2\sin(2x+x^3)$ 与 $3x$ 比较是 ().

- A. 高阶无穷小 B. 等价无穷小
C. 同阶无穷小, 但不是等价无穷小 D. 低阶无穷小

(11) 当 $x \rightarrow 0$ 时, 与 x 等价的无穷小是 ().

A. $\frac{\sin 2x}{2\sqrt{x}}$ B. $\ln(1+x)$ C. $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$ D. $x^2(x-1)$

(12) 当 $x \rightarrow 0$ 时, 与 $\sin x^2$ 等价的无穷小量是 ().

A. $\ln(1+x)$ B. $\tan x$ C. $2(1-\cos x)$ D. $e^x - 1$

(13) 当 $x \rightarrow 0$ 时, 将下列函数与 x 进行比较, 与 x 是等价无穷小的为 ().

A. $\sin^2 x$ B. $2(\sqrt{1+x^2} - 1)$ C. $x \sec x + \tan x$ D. $x + x^2 \sin \frac{1}{x}$

(14) 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^2 + b}{x \sin 2x} = 2$, 则 ().

A. $a = 4, b = 0$ B. $a = 1, b = 2$ C. $a = 2, b = 0$ D. $a = 2, b = 4$

(15) 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{2x} =$ ().

A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

(16) 函数 $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, 当 $x \rightarrow 0$ 时 $f(x)$ 是 ().

A. 有界变量 B. 无界变量 C. 无穷小量 D. 无穷大量

(18) 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (x \sin \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \sin x)$ 的结果是 ().

A. -1 B. 1 C. 0 D. 不存在

(18) 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 函数 $(1 + \frac{1}{x})^x$ 的极限是 ().

A. e B. $-e$ C. 1 D. -1

(19) 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{3x})^{2x} =$ ().

A. $e^{\frac{2}{3}}$; B. $e^{-\frac{2}{3}}$ C. e D. e^{-1}

(20) 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{4x}} =$ ().

A. e^2 B. e^{-2} C. $e^{\frac{1}{2}}$ D. $e^{-\frac{1}{2}}$

(21) 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{k}{x}} = e^2$, 则 $k =$ ().

A. 1 B. 2 C. e^2 D. e

(22) 下列极限计算错误的是 ().

A. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 1$ B. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
C. $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$ D. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$

(23) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 有定义是 $f(x)$ 在点 x_0 连续的 ().

A.充分条件 B.必要条件 C.充要条件 D.即非充分又非必要条件

(24) $f(x_0+0)$ 与 $f(x_0-0)$ 都存在是 $f(x)$ 在 x_0 连续的 ().

A.必要条件 B.充分条件 C.充要条件 D.无关条件

(25) 如果函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin ax}{x} + 2, & x < 0, \\ 1, & x = 0, \\ \frac{\ln(1+x)}{\arctan x} + b, & x > 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则常数 a, b 分别是 ().

A. 0,1 B. 1,0 C. 0,-1 D. -1,0

(26) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 极限存在是 $f(x)$ 在点 x_0 连续的 ().

A.充分条件 B.必要条件
C.充要条件 D.即非充分又非必要条件

(27) 函数 $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$, 下列说法正确的是 ().

A. $x=1$ 为其第一类间断点 B. $x=1$ 为其可去间断点
C. $x=2$ 为其跳跃间断点 D. $x=2$ 为其可去间断点

(28) 设 $f(x) = x^2 + \arctan \frac{x^2 + 3}{x-1}$, 则 $x=1$ 是 $f(x)$ 的 ().

A.可去间断点 B.跳跃间断点 C.无穷间断点 D.振荡间断点

(29) $x=1$ 是函数 $f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x-1}$ 的 ().

A.无穷间断点 B.可去间断点 C.跳跃间断点 D.连续点

(30) 点 $x=0$ 是函数 $f(x) = \frac{x^2 - 4}{1 - \cos 2x}$ 的 ().

A.无穷间断点 B.可去间断点 C.跳跃间断点 D.连续点

(31) 设 $f(x) = \begin{cases} x-3, & x \leq 0, \\ x+3, & x > 0, \end{cases}$ 则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的 ().

A.连续点 B.可去间断点 C.无穷间断点 D.跳跃间断点

(32) 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \ln(1+x), & x > 0, \\ 1, & x \leq 0, \end{cases}$ 则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的 ().

A.连续点 B.可去间断点 C.无穷间断点 D.跳跃间断点

2. 填空题:

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(e^{-x} - 1)}{x - \sin x} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 2x}{3x^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin 2(x-1)}{5(1-x)} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(4) 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1-2x)^{\frac{1}{2x}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(5) 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{k}{x})^x = e^4$, 则 $k = \underline{\hspace{2cm}}.$

(6) 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{kx})^x = e^2$, 则 $k = \underline{\hspace{2cm}}.$

(7) 已知分段函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 3x}{9x^2}, & x > 0, \\ x + a, & x \leq 0, \end{cases}$ 连续, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}.$

(8) 若 $y = f(x)$ 在点 x_0 连续, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = \underline{\hspace{2cm}}.$

(9) 若函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续, 且 $f(x_0) = 1$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} 2f(x) = \underline{\hspace{2cm}}.$

(10) 函数 $f(x) = \arctan \frac{4x}{x-1}$ 的间断点是 $x = \underline{\hspace{2cm}}.$

(11) 函数 $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2 - 2x - 3}$ 的无穷间断点是 $x = \underline{\hspace{2cm}}.$

(12) 函数 $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x - 4}$ 的可去间断点是 $x = \underline{\hspace{2cm}}.$

3. 求下列函数极限:

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 - 4x^3 - 5x - 13}{4x^4 - 7x^2};$

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 5x - 1}{7x^3 - 2x};$

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x - 4}{x^2 - 4};$

(4) $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{3}{x^2 - 1} - \frac{1}{x + 1} \right);$

(5) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 4};$

(6) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x^2 + 2x - 8};$

(7) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x\sqrt{x-3} - x}{x^3 - 6x^2 + 8x};$

(8) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x - 4}{x^2 - 4}.$

4. 已知 $f(x)$ 是多项式, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - 2x^3}{x^2} = 2$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3$, 求 $f(x)$.

5. 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2} - 1}{x \ln(1-6x)};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{-x} - 1) \sin x}{x \ln(1-6x)};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - 1) \sin x}{x^2 \ln(1-6x)};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1 - \cos x)}{x(e^{2x} - 1)};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\ln(1-x^2)};$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos 2x}{\ln(1-x^2)}.$$

6. 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\tan 3x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-3x^2)}{e^{-x^2} - 1};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x^2)}{-6x^2};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+6x} - 1}{2(\sqrt[4]{1+3x} - 1)};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\arcsin(x-1)};$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{e^{(x-2)^2} - 1}.$$

7. 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{\sin 2x^2};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \sin \frac{2}{3x^2};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 2 \sin x}{3x + 4 \tan x};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{6x};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{2}{x}};$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \cos x)^{\sec x}.$$

8. 讨论 $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{4}{x}}, & x < 0, \\ \ln(1+x)^2, & x \geq 0, \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处的连续性.

9. 求下列函数的间断点, 并判断其类型:

$$(1) f(x) = e^{\frac{1}{x}} + 2;$$

$$(2) f(x) = \frac{x^2}{\sin^2 x};$$

$$(3) f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}} + 4}{e^{\frac{1}{x}} - 4};$$

$$(4) f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}.$$