

第七章 微分方程

1. 选择题:

(1) 下列方程中, () 是微分方程.

A. $y^2 + 2y = e^{-2x}$ B. $y = e^{-2x}$ C. $y'' = e^{-2x}$ D. $xy = e^{-2x}$

(2) 下列方程中, () 是微分方程.

A. $y \sin x + y \cos x = \ln(1 + xy)$ B. $y^4 + 3xy^3 - 7e^x y^2 - y \sin 3(x+1) = 0$
C. $ye^{y-2} = x^2 - 3x + 6$ D. $xy' = \frac{y''}{2y - 6x}$

(3) 下列方程中, () 不是微分方程.

A. $y^2 + 4y = 0$ B. $ye^{3x} dy - \sin x dx = 0$
C. $y'e^{y^2} - \ln x = x^2$ D. $\frac{d^2 y}{dx^2} = \cos x - 4x$

(4) 下列方程中, () 不是微分方程.

A. $y' + 4xy = 3x^2 - 6x + 2$ B. $x dy = y dx$
C. $ye^y - \tan y^2 = x$ D. $x \frac{d^2 y}{dx^2} + x^2 \frac{dy}{dx} = 4$

(5) 微分方程 $(y'')^3 + 2x^4 y = x \cos x$ 的阶数为 ().

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

(6) 微分方程 $\frac{d^2 y}{dx^2} + 2xy^3 = 0$ 的阶数为 ().

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

(7) 下列微分方程中, () 是线性微分方程.

A. $y'' \cos 4x + y'e^{-2x} = \ln(1+x)$ B. $\sin xy' + 6y = 0$
C. $2(y')^2 + xy y' = 3$ D. $xe^{y'} = 4y$

(8) 下列微分方程中, () 是线性微分方程.

A. $3y'' + y'e^y = \ln(1+x)$ B. $y' + 6 \sin x = 0$
C. $x \frac{d^2 y}{dx^2} - y \frac{dy}{dx} + y^3 = 0$ D. $y' = xe^y$

(9) 下列微分方程中, () 是齐次线性微分方程.

A. $xy' + y \sin x + 1 = 0$ B. $y dy + x dx = 0$
C. $\cos x dy = \sin y dx$ D. $y' + 1 = ye^{-2x}$

(10) 下列微分方程中, () 是齐次线性微分方程.

A. $(1+x^2)y' + ye^x = \arctan x$ B. $(1+x^2)dy + (ye^x - \arctan x)dx = 0$
C. $(1+x^2)dy + e^x(y - \arctan x)dx = 0$ D. $(1+x^2)dy + y(e^x - \arctan x)dx = 0$

(11) 下列方程中, () 是可分离变量的微分方程.

$$A. xy' + ye^{x+y} = 0$$

$$B. y' + \arcsin(ye^x) = 0;$$

$$C. (y')^2 + 2x - y = 0$$

$$D. (2 - x^2)dy + ye^{xy}dx = 0.$$

(12) 下列方程中, () 是可分离变量的微分方程.

$$A. y'' + 2y' - 3y = \sin x$$

$$B. y' + 2y = e^{-2x}$$

$$C. (y')^2 + \sin(x+y) = 0$$

$$D. (y')^2 - y \sin x = 0$$

(13) 微分方程 $y' - y \sin x = 0$ 的通解是 ().

$$A. Ce^{\cos x}$$

$$B. Ce^{-\cos x}$$

$$C. e^{C + \cos x}$$

$$D. e^{C - \cos x}$$

(14) 微分方程 $yy' - xe^{x+y} = 0$ 的通解是 ().

$$A. -e^{-y}(y+1) = e^x(x-1) + C$$

$$B. e^y(y+1) = -e^{-x}(x+1) + C$$

$$C. e^y(y-1) = -e^{-x}(x+1) + C$$

$$D. -e^{-y}(y-1) = e^x(x+1) + C$$

(15) 微分方程 $(1+x^2)dy - dx = 0$ 的通解是 ().

$$A. \arctan Cx$$

$$B. C \arctan x$$

$$C. C - \arctan x$$

$$D. \arctan x + C$$

(16) 微分方程 $(1+x^2)dy - xydx = 0$ 的通解是 ().

$$A. C\sqrt{1+x^2}$$

$$B. C(1+x^2)$$

$$C. \sqrt{1+x^2} + C$$

$$D. (1+x^2) + C$$

(17) 下列函数中, () 是非齐次线性微分方程 $y'(1+x^2)\arctan x = y-1$ 的通解.

$$A. \arctan x + C$$

$$B. \arctan Cx + 1$$

$$C. C \arctan x - 1$$

$$D. C \arctan x + 1$$

(18) 下列函数中, () 是非齐次线性微分方程 $xy' - y - 4x^3 = 0$ 的通解.

$$A. 2x + Cx^3$$

$$B. 2x - Cx^3$$

$$C. 2x^3 + Cx$$

$$D. Cx - 2x^3$$

(19) 下列方程中, () 不是可降阶的高阶微分方程.

$$A. y'' = x \sin x$$

$$B. y'' + 2y = e^{-2x}$$

$$C. y'' + e^{y'} \sin x = 0$$

$$D. y'' - y' \sin y = 0$$

(20) 下列方程中, () 不是可降阶的高阶微分方程.

$$A. xy'' = y$$

$$B. y'' = \tan x - \ln 2x$$

$$C. y'' \arccos x + y' = 0$$

$$D. yy'' - (y')^2 = 2$$

(21) 下列函数中, () 是 3 阶微分方程 $y''' = 2$ 的通解.

$$A. \frac{x^3}{3} + Cx^2 + Cx + C$$

$$B. Cx^3 + Cx^2 + Cx + C$$

$$C. C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4$$

$$D. \frac{x^3}{3} + C_1x^2 + C_2x + C_3$$

(22) 下列函数中, () 是 2 阶微分方程 $y'' = \sin x$ 的通解.

$$A. \cos x + C_1x + C_2$$

$$B. -\sin x + C_1x + C_2$$

$$C. -\cos x + C_1x + C_2$$

$$D. \sin x + C_1x + C_2$$

(23) 下列函数中 () 是 2 阶微分方程 $y'' = 2y'$ 的通解.

$$A. C_1e^{-2x} + C_2$$

$$B. C_1e^{2x} + C_2$$

C. $Ce^{-2x} + C$

D. $Ce^{2x} + C$

(24) 下列函数中, () 是高阶微分方程 $xy'' - (1+2x^2)y' = 0$ 的通解.

A. $C_1e^{x^2} + C_2$

B. $C_1e^{x^2} + C_2x$

C. $C_1e^x + C_2x^2$

D. $C_1e^{x^2} + C_2e^x$

(25) 下列函数组中, 线性相关的是 ().

A. e^x, e^{3x}

B. $\sin x, \sin 3x$

C. $\ln x, \ln x^3$

D. x, x^3

(26) 下列函数组中, 线性相关的是 ().

A. e^x, e^{2x}

B. $\cos 2x - 1, \sin^2 x$

C. $\ln x, \ln 2x$

D. x, x^2

(27) 下列函数组中, 线性无关的是 ().

A. $e^x, -e^x$

B. $\cos 2x, \sin^2 x$

C. $-x, x$

D. $\ln x, \ln \frac{1}{x}$

(28) 设方程 $y' + p(x)y = q(x)$ 有两个不同的解 y_1, y_2 , 若 $ay_1 + by_2$ 也是方程的解, 则 ().

A. $a = b$

B. $a + b = 1$

C. $a + b = 0$

D. a, b 任意数

(29) 方程 $y'' + 2y' - 3y = 0$ 的通解是 ().

A. $C_1e^{-3x} + C_2e^x$

B. $C_1e^{3x} + C_2e^{-x}$

C. $C_1e^{-3x} + C_2e^{-x}$

D. $C_1e^{3x} + C_2e^x$

(30) 方程 $y'' - 2y' = 1$ 的通解是 ().

A. $C_1 + C_2e^{2x} - \frac{x^2}{2}$

B. $C_1 + C_2e^{2x} - \frac{x}{2}$

C. $C_1e^x + C_2e^{2x} - \frac{x^2}{2}$

D. $C_1e^x + C_2e^{2x} - \frac{x}{2}$

(31) 方程 $y' - 2y = 0, y(0) = 3$ 的解是 ().

A. $3e^{-2x}$

B. $2e^{3x}$

C. $2e^{-3x}$

D. $3e^{2x}$

(32) 方程 $y'' + y = 0$ 的通解是 ().

A. $C_1 \sin(-x) + C_2 \cos 4x$

B. $C_1 \sin 2x + C_2 \cos(-x)$

C. $C_1 \sin(-2x) + C_2 \cos(-3x)$

D. $C_1 \sin x + C_2 \cos x$

(33) 方程 $y'' - 2y' + 2y = 0$ 的通解是 ().

A. $C_1 \sin x + C_2 \cos x$

B. $C_1 \sin(-x) + C_2 \cos(-x)$

C. $e^x (C_1 \sin x + C_2 \cos x)$

D. $e^{-x} (C_1 \sin x + C_2 \cos x)$

(34) 方程 $y'' - 2y' + 5y = 0$ 的通解是 ().

A. $e^x (C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x)$

B. $e^{2x} (C_1 \sin x + C_2 \cos x)$

C. $e^{-x} (C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x)$

D. $e^{-2x} (C_1 \sin x + C_2 \cos x)$

(35) 方程 $y'' - 2y' + y = 0$ 的通解是 ().

A. $e^{2x} (C_1 + C_2 x)$

B. $e^x (C_1 x + C_2 x^2)$

C. $e^x (C_1 + C_2 x)$

D. $e^{2x} (C_1 + C_2 x^2)$

(36) 方程 $y'' + 4y' + 4y = 0, y(0) = 3, y'(0) = 4$ 的解是 ().

A. $e^{-2x} (10 + 3x)$

B. $e^{2x} (10 + 3x)$

C. $e^{-2x}(3+10x)$

D. $e^{2x}(3+10x)$

2. 填空题:

(1)微分方程 $(y'')^3 + 4y^{(4)} + 4x^2y = 6$ 的阶数是_____.

(2)微分方程 $y'' \ln 6x + 4yy' + 4x^2y = 4e^{-x}$ 的阶数是_____.

(3)微分方程 $\frac{d^3s}{dx^3} - \cos\sqrt{2x} \frac{d^2s}{dx^2} = s$ 的阶数是_____.

(4)微分方程 $xy' + \frac{1-x}{y} = 0$ 化为可分离变量方程是_____.

(5)微分方程 $dy + x^2ydx = 0$ 化为可分离变量方程是_____.

(6)微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{2y}$ 的通解是_____.

(7)微分方程 $\frac{dy}{dx} + e^y = 0$ 的通解是_____.

(8)微分方程 $y' = e^y \sin x$ 的通解是_____.

(9)微分方程 $y' = y \ln y$ 的通解是_____.

(10)微分方程 $x dy = 2y dx$ 满足条件 $y|_{x=1} = 2$ 的特解是_____.

(11)微分方程 $\sqrt{1-x^2} dy + xy dx = 0$ 满足条件 $y|_{x=1} = -1$ 的特解是_____.

(12)方程 $(y^3 - xy^2)dx + y^2 \sin x dy = 0$ 对应的齐次方程是_____.

(13)方程 $ye^{\sin x} + x^2 \frac{dy}{dx} = 3$ 对应的齐次方程是_____.

(14)方程 $(e^x - 1)y' = ye^x + (e^{2x} - 1)(e^x - 1)$ 的通解是_____.

(15)方程 $xy' \ln x = y + x(\ln x)^2$ 满足条件 $y|_{x=e} = 0$ 的特解是_____.

(16)方程 $y' - 8x = 4xy$ 满足条件 $y|_{x=0} = 0$ 的特解是_____.

(17)方程 $y'' = e^{-x}$ 的通解是_____.

(18)方程 $y'' = e^{\frac{x}{2}} + \cos \frac{x}{3}$ 的通解是_____.

(19)方程 $y'' \sqrt{1-x^2} = e^{\arcsin x - y'}$ 的通解是_____.

(20)方程 $yy'' + 2(y')^2 = 0$ 的通解是_____.

(21)设二阶常系数齐次线性方程 $y'' + py' + qy = 0$ 有两个不同的解 y_1, y_2 , 那么函数 $2ay_1 - 3by_2$ _____ (是/不是) $y'' + py' + qy = 0$ 的解.

(21)设二阶常系数齐次线性方程 $y'' + py' + qy = 0$ 有两个不同的解 y_1, y_2 , 那么当 y_1 与 y_2 线性 _____ 时, $C_1y_1 + C_2y_2$ 是 $y'' + py' + qy = 0$ 的通解.

(23)设二阶常系数非齐次线性方程 $y'' + py' + qy = f(x)$ 有两个不同的解 y_1, y_2 , 那么函数 $ay_1 + by_2$ _____ (是/不是) $y'' + py' + qy = f(x)$ 的解.

(24)二阶常系数非齐次线性方程 $y'' + py' + qy = f(x)$ 的通解由其所对应的齐次线性方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的通解与 _____ 之和所构成.

(25)二阶常系数齐次线性方程 $y'' + py' + qy = 0$ 对应的特征方程为_____.

(26)方程 $y'' - y = 0$ 的通解是_____.

(27) 方程 $y'' - 4y' - 12 = 0$ 的通解是_____.

(28) 已知微分方程 $y'' + 4y + 3\sin x = 0$ 的通解为 $C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x + \frac{p \sin x}{3}$, 则 $p =$ _____.

3. 求下列微分方程的解:

(1) $xy' - 2y \ln y = 0$;

(2) $2e^x \tan y dx + (3 - e^x) \sec^2 y dy = 0$;

(3) $\sec^2 x \tan y dx - \sec^2 y \tan x dy = 0$;

(4) $(1 - y^2 + x^2 - x^2 y^2) y' = 3x^2 y$;

(5) $\frac{dy}{dx} = \frac{4x + e^x}{2y - e^{-y}}$;

(6) $(2 + x)y dx + (1 - y)x dy = 0$;

(7) $\cos x \sin y dy = \cos y \sin x dx, y|_{x=0} = \pi$;

(8) $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0, y|_{x=0} = 1$;

(9) $y' = 2\sqrt{y} \ln x, y|_{x=1} = 0$;

(10) $(y')^2 \sin^4 x - 4y = 0, y|_{x=\frac{\pi}{4}} = 1$;

(11) $y' + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x}$;

(12) $y' - \frac{3}{x}y = x^4 e^x$;

(13) $y' - 2xy = 2x^3$;

(14) $xy' - y = \frac{x}{\ln x}$;

(15) $xy' - (1 - x)y = x^2 e^{2x}$;

(16) $y' - y \tan x = 3 \sec x$;

(17) $(1 + x^2)y' - 2y \arctan x = (1 + x^2)e^{\arctan^2 x}, y|_{x=0} = 2$;

(18) $x^2 dy - (2xy + x^4 - 3x^3) dx = 0, y|_{x=1} = 2$;

(19) $x dy - [\frac{y}{x-1} + (x-1)e^x] dx = 0, y|_{x=2} = \frac{1}{2}e^2$;

(20) $y' - \frac{2x}{1+x^2}y = -1 - x^2, y|_{x=0} = 1$;

(21) $y^{(4)} = 3 + \sin 2x$;

(22) $y'' = 16xe^{-2x}$;

(23) $y'' = 1 + x^2$;

(24) $y''(1 + e^x) - y'e^x = 0$;

(25) $y'' = y' + e^{2x}$;

(26) $y'' - y' \tan x = 3 \sec x$;

(27) $y'' + 2xy' = e^{-x^2}, y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 0$;

(28) $y'' + 2xy' = -2e^{-x^2}, y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 0$;

(29) $y'' - 4xy' = 8x^3, y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = -1$;

(30) $y'' + y' \cos x = e^{-\sin x} \sin x, y|_{x=0} = 0, y'|_{x=\pi} = 1$;

(31) $2yy'' - y'^2 - 1 = 0$;

(32) $y^3 y'' + 1 = 0$;

(33) $y'' = e^y y'$;

(34) $y'' + 3y'^2 = 0$;

(35) $y'' - y'^2 \tan y = 0$;

(36) $y'' - y'^3(1 + e^y) = 0$;

(37) $y'' + y'^3 \sin y = 0$;

(38) $2y'' = 3\sqrt{y}, y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 2$;

(39) $y'' = \frac{3}{2}y^2, y|_{x=3} = 1, y'|_{x=3} = 1$;

(40) $y'' - 2y = 0$;

(41) $y'' - 2y' = 0$;

(42) $y'' + 5y' + 4y = 0$;

(43) $y'' + 10y' + 25y = 0$;

(44) $2y'' - 4y' + y = 0$;

(45) $y'' - 3y' = 0, y|_{x=0} = 2, y'|_{x=0} = 3$;

- (46) $y'' - 3y' + 2y = 0$, $y|_{x=0} = 2$, $y'|_{x=0} = 3$;
- (47) $y'' - y = -2x + 1$;
- (48) $y'' - 4y = 4$;
- (49) $y'' - y = 4xe^x$;
- (50) $y'' + 5y' + 4y = e^{-4x}$;
- (51) $y'' - 2y' + y = e^x$;
- (52) $y'' - 2y' + y = 12xe^x$;
- (53) $y'' - 3y' + 2y = e^x + 2x + 3$;
- (54) $y'' + 4y' + 4y = 2 - 4x + 3e^{-2x}$;
- (55) $y'' - 3y' + 2y = 5$, $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 2$;
- (56) $y'' - 10y' + 9y = 32e^x$, $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 5$;
- (57) $y'' - 4y' + 13y = 40\cos 3x$;
- (58) $y'' + 4y + 8\cos 2x = 0$;
- (59) $y'' + y = 9x\sin 2x - \cos x$;
- (60) $4y'' + y = 4\sin \frac{x}{2} + 65e^x \cos x$;
- (61) $y'' + y + \sin 2x = 0$, $y|_{x=\pi} = 1$, $y'|_{x=\pi} = 1$;
- (62) $y'' + y + \sin x = 0$, $y|_{x=\pi} = -\frac{\pi}{2}$, $y'|_{x=\pi} = 1$.